

高等学校（数学）指導プログラム

学 校 名	岩手県立花巻南高等学校
対 象 学 級	2年1組(男子13名、女子29名、計42名)
指 導 年 月 日	平成14年10月7日(月)、第2校時
指 導 者	中村道典
作 成 者	中村道典、金沢卓司、柳田秀雄、鈴木利典 谷木啓恭

単元名「指数関数・対数関数」

単元設定の理由

本単元は、数学 で学んだ二次関数に続いてさらに関数概念を充実させるため、社会事象や自然現象に関連の深い「指数関数」と「対数関数」を取り上げ、一つのまとまった学習経験の単位として設定したものである。

本単元のねらいとその学習内容は、学習指導要領（数学）の目標及び内容「(1) いろいろな関数 ア 指数関数」に基づいて設定した。

ただし、数学 は、数学 に続く内容として更に広い数学的な資質の育成を目指して設けられたものであり、ここで扱う関数は、あくまでも、その関数の実在と基本的な特徴を把握することが目的であり、関数式の技巧的な変形とか特異な性質の追及には深入りしない。

- (1) 生徒は、中学校において、指数が正の場合の指数法則を学んでいる。ここでは、指数を0及び負の整数にまで拡張することを取り扱い、さらに、指数を有理数にまで拡張し、拡張された指数の意味や指数法則を明らかにし指数関数に発展させたい。
- (2) 生徒にとって、対数の定義は理解しにくいところである。指数関数のグラフを基に、具体的な座標を取り上げながら、 $M = a^p$ $p = \log_a M$ の相互変換を理解させるようにしたい。
- (3) 社会生活における複利法や、バクテリアの増殖や放射線物質の崩壊などの様子は指数関数で表せることが多く、デシベル(dB)やマグニチュード(M)などには対数が活用されている。具体的な事象を通しての指導や活用事例の紹介は、生徒に興味・関心をもたせ、関数の理解を深める上で有意義であると思われるので適宜取り上げたい。
- (4) 指数関数のグラフとしては、底が2や1/2などの簡単なものを扱うが、手計算の場合はx座標を1/2刻みでとるのが限界であり、そのときに得られる数個の点を滑らかに結んでも、指数関数のグラフとしての実感は薄い。また、対数関数のグラフは、指数関数のグラフ上の点のx, y座標を入れ替えた点の集合として扱うが、前述したように手計算には限界があり、生徒にとってはイメージが沸きにくいところがある。

そこで、グラフを扱う場面ではコンピュータを活用し、手計算では困難な部分をコンピュータで計算させグラフを描かせることにより、生徒が実感を伴って指数関数・

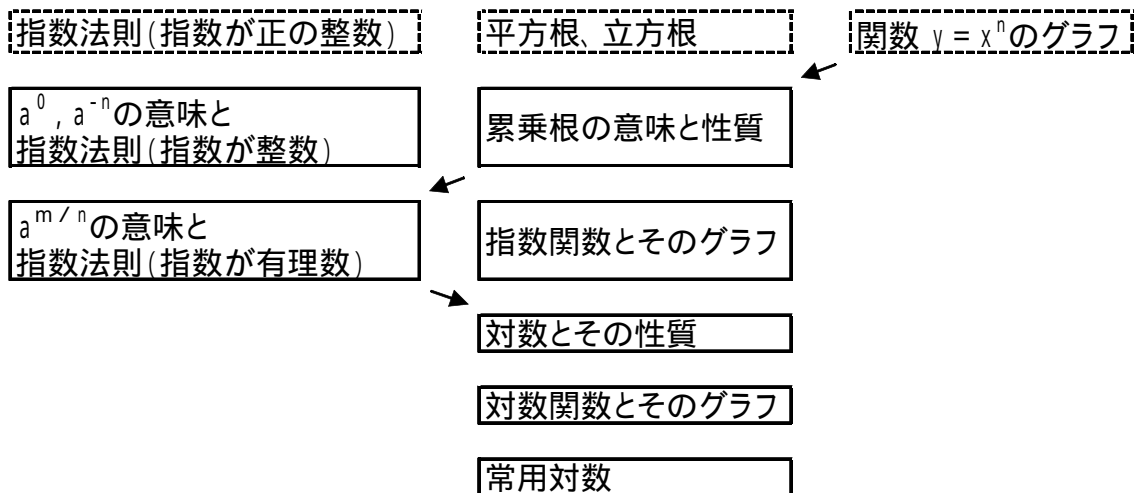
対数関数の特徴をつかめるようにしたい。さらに、シミュレーション機能を利用して底の変化によるグラフの変化を探求させたり、指数関数と対数関数のグラフを同一平面上に描いて両者が直線 $y = x$ に関して対称な関係にあることを発見させるなどの活動に活用したい。

本単元で使用するソフトウェアは、関数グラフソフトの「GRAPES」(友田勝久氏が著作権を有するフリーソフトウェア)である。

単元の指導目標

- (1) 指数の拡張の意味がわかり、指数法則を使うことができる
- (2) 「対数をとる」ことの意味がわかり、対数についての公式を運用できる
- (3) 指数関数・対数関数の定義・性質がわかる

単元の教材構造



単元の指導計画(全 12 時間)

- 第 1 時 指数の拡張(0 や負の数の指数)
- 第 2 時 指数の拡張(累乗根)
- 第 3 時 指数の拡張(有理数と無理数の指数)
- 第 4 時 指数関数とそのグラフ(指数関数の性質)
- 第 5 時 指数関数とそのグラフ(方程式・不等式)
- 第 6 時 対数とその性質(対数)
- 第 7 時 対数とその性質(対数の性質)
- 第 8 時 対数関数とそのグラフ(対数関数の性質)・・・本時
- 第 9 時 対数関数とそのグラフ(方程式・不等式)
- 第 10 時 常用対数
- 第 11 時 練習問題
- 第 12 時 練習問題

本時の学習指導

(1) 主題 「対数関数とそのグラフ (対数関数の性質)」

(2) 指導目標

指数関数のグラフを基に対数関数のグラフを描かせ、 x や y の変域、関数の値の増減の様子などを調べさせることにより、対数関数の性質を理解させるとともに、事象を数学的に考察し処理する能力を育てる。

(3) 目標行動

指数関数のグラフを基に対数関数のグラフをかくことができ、さらに、 x や y の変域、関数の値の増減などを考察して、対数関数の性質を説明することができる。

(4) 下位目標行動

G 目標行動に同じ

対数関数 $y = \log_a x$ の性質を説明することができる。

関数 $y = \log_a x$ のグラフをかくことができる。

対数関数の定義を説明できる。

関数 $y = a^x$ のグラフと関数 $y = \log_a x$ のグラフの関係を説明できる。

R 関数 $y = a^x$ のグラフをかくことができる。

関数 $y = \log_{1/2} x$ の特徴を説明することができる。

関数 $y = (1/2)^x$ のグラフと関数 $y = \log_{1/2} x$ のグラフの関係を説明できる。

関数 $y = \log_{1/2} x$ のグラフをかくことができる。

R 関数 $y = (1/2)^x$ のグラフをかくことができる。

関数 $y = \log_2 x$ の特徴を説明することができる。

関数 $y = 2^x$ のグラフと関数 $y = \log_2 x$ のグラフの関係を説明できる。

R 関数 $y = 2^x$ のグラフをかくことができる。

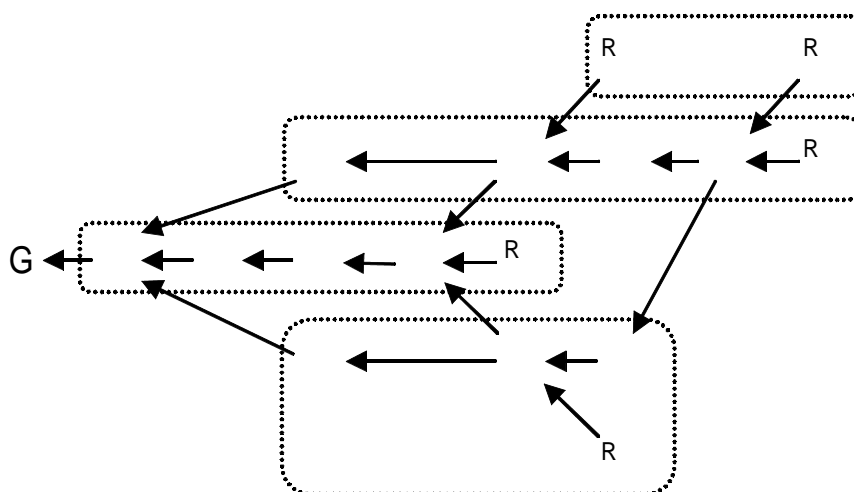
関数 $y = \log_2 x$ のグラフをかくことができる。

関数 $y = \log_2 x$ の対応表を作ることができる。

R $y = 2^x$ を対数を用いて表すことができる。

R 関数 $y = 2^x$ の対応表を作ることができる。

(5) 形成関係図とグルーピング



(6) 本時の展開過程

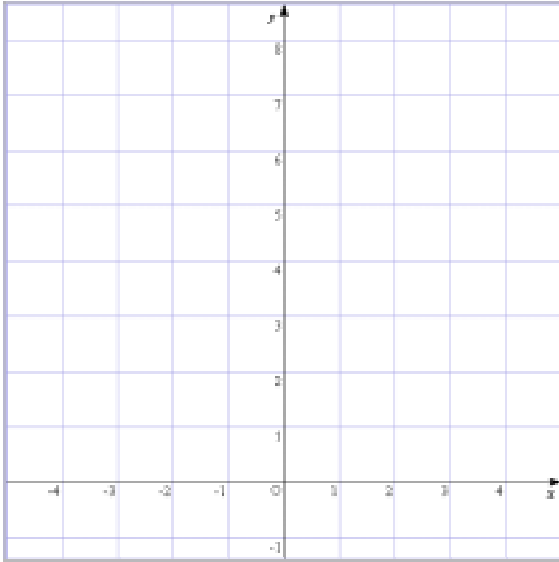
指示・演示は、プロジェクタを使用して行う。

時間	主な学習内容	展開の流れ	教材・教具と留意事項
7分 7分-	<p><導入></p> <p>1. レディネス調査</p> <ul style="list-style-type: none"> $y = 2^x$のグラフをかく (R) $y = 2^x$を対数で表す (R) <p>2. プレテスト</p> <ul style="list-style-type: none"> $y = \log_3 x$のグラフをかく <p>3. 主題</p> <ul style="list-style-type: none"> 関数 $y = \log_a x$のグラフをかいてその性質を調べる (G) 		<p>プリント</p> <ul style="list-style-type: none"> 学習プリントに記入させる。 グラフは、特徴を答えさせて確認する。 相互変換の復習はしていないにおこなう。 <p>プリント</p> <p>プリント</p> <ul style="list-style-type: none"> 以前 $y = a^x$についてまとめたことを思い起こさせる。
13分 20分-	<p><展開></p> <p>1. $y = \log_2 x$のグラフ</p> <ul style="list-style-type: none"> $y = 2^x$の対応表を作る (R) $y = \log_2 x$の対応表を作る () $y = \log_2 x$のグラフをかく () $y = \log_2 x$と $y = 2^x$の関係がいえる () <p>[評価1]</p> <ul style="list-style-type: none"> $y = \log_2 x$の特徴をあげる () <p>定義域、値域、増減 x軸との交点、漸近線など</p>		<p>プリント</p> <ul style="list-style-type: none"> $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, P$について作成させる。 <p>プリント</p> <ul style="list-style-type: none"> $y = 2^x$ $x = \log_2 y$から、前表の x, yを交換すればよいことに気付かせる。 <p>プリント, PC</p> <ul style="list-style-type: none"> 対応表からグラフをかかせる。 その後で、PCを使ってより多くの点を取り、曲線が作られる様子を見る。点 $(2^p, p)$の残像を利用する。 <p>PC</p> <ul style="list-style-type: none"> 2つのグラフをPC上で比較させる。 対応表の作成手順も注意させる。 <p>プリント, PC</p> <ul style="list-style-type: none"> 定義域、値域、増減、x軸との交点、漸近線など。 上記以外の意見にも柔軟に対応する。
10分 30分-	<p>2. $y = \log_{1/2} x$のグラフ</p> <ul style="list-style-type: none"> $y = (1/2)^x$のグラフをかく (R) $y = \log_{1/2} x$のグラフをかく () $y = \log_{1/2} x$と $y = (1/2)^x$の関係がいえる () <p>[評価2]</p> <ul style="list-style-type: none"> $y = \log_{1/2} x$の特徴をあげる () <p>定義域、値域、増減 x軸との交点、漸近線など</p>		<p>PC</p> <ul style="list-style-type: none"> 形を予想させた後、PCを使ってグラフをかかせる。 $y = 2^x$との関係も考えさせる。 <p>PC</p> <ul style="list-style-type: none"> 形を予想させた後、PCを使ってグラフをかかせる。 $y = \log_2 x$との関係も考えさせる。 <p>PC</p> <ul style="list-style-type: none"> 2つのグラフを比較させる。 確認後、直線 $y = x$もかく。 <p>PC</p> <ul style="list-style-type: none"> 定義域、値域、増減、x軸との交点、漸近線など。 上記以外の意見にも柔軟に対応する。
13分 43分-	<p>3. $y = \log_a x$のグラフ</p> <ul style="list-style-type: none"> $y = a^x$のグラフをかく (R) $y = \log_a x$と $y = a^x$の関係がいえる () 対数関数の定義がわかる () $y = \log_a x$のグラフをかく () <p>[評価3]</p> <ul style="list-style-type: none"> 対数関数の性質をあげる () <p>定義域、値域、増減 x軸との交点、漸近線など</p>		<p>PC</p> <ul style="list-style-type: none"> PCを使ってグラフをかかせる。使用するソフトでは aはパラメータとして変化させることができる。 <p>プリント, PC</p> <ul style="list-style-type: none"> $\log_2 x$や $\log_{1/2} x$での考察から気付かせる。 <p>プリント</p> <ul style="list-style-type: none"> $a > 0$かつ $a \neq 1$のとき、関数 $y = \log_a x$を、aを底とする xの対数関数という。 <p>PC</p> <ul style="list-style-type: none"> $a > 1, 0 < a < 1$の場合わけに注意させる。 aをパラメータとして動かし特徴をつかませる。 <p>PC</p> <ul style="list-style-type: none"> 定義域、値域、増減、x軸との交点、漸近線など。
7分 50分-	<p><まとめ></p> <p>1. ポストテスト (G)</p> <ul style="list-style-type: none"> $y = \log_3 x$のグラフをかけ その定義域、値域、増減、x軸との交点、漸近線は? 直線 $y = x$に関して対称なグラフ <p>2. 次時の学習の予告</p> <ul style="list-style-type: none"> 対数を含む方程式、不等式 		<p>プリント</p> <ul style="list-style-type: none"> 完成法で記入させ、生徒に発表させる。 <p>次時は、対数を含む方程式、不等式について学習することを知らせる。</p>

学習プリント（対数関数のグラフ）

2年1組 番 氏名 _____

（復習） $y = 2^x$ のグラフ



（復習）指数・対数の関係

グラフに書き込みながら考えましょう

$8 = 2^x$ であるとき $x = 3$

$5 = 2^x$ であるとき $x =$

左右の内容は同じ、見方を変えただけ

$5 = 2^x$ $x =$

このことから

$y = 2^x$ $x =$

さらに、

$y = a^x$ $x =$

— 今日のテーマ

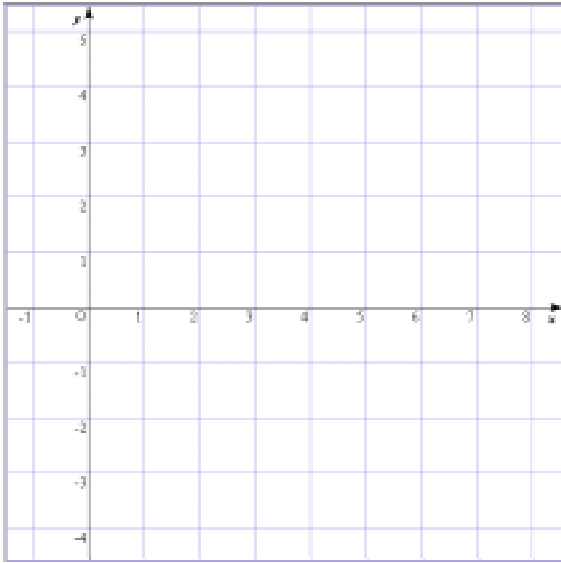
$y = 2^x$ の対応表（より、 $x =$ の対応表でもある）

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	p
y								

$y = \log_2 x$ の対応表（上の、 $x =$ との違いは？）

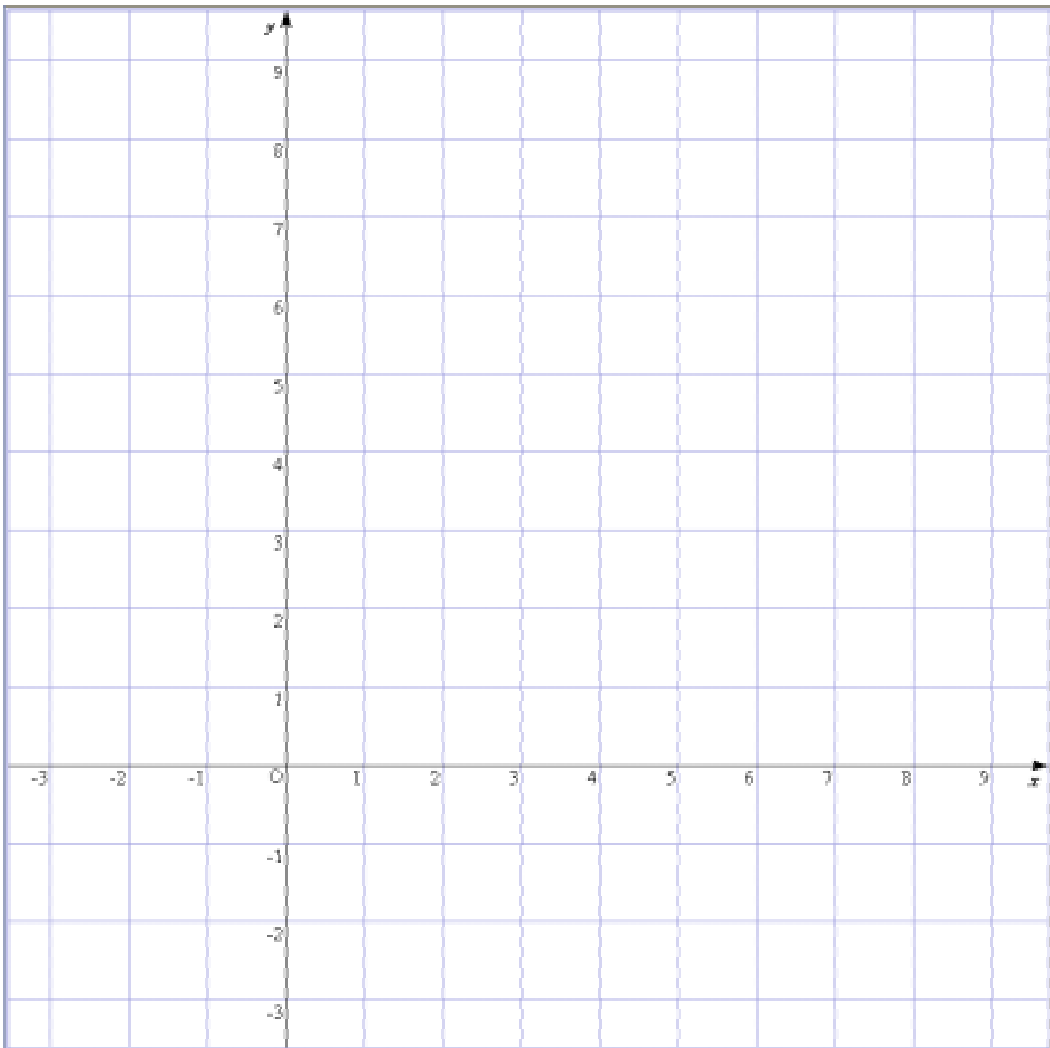
x								
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	p

$y = \log_2 x$ のグラフ



【特徴】

$y = (1/2)^x$ のグラフと $y = \log_{1/2} x$ のグラフ (特徴は?)



対数関数の定義

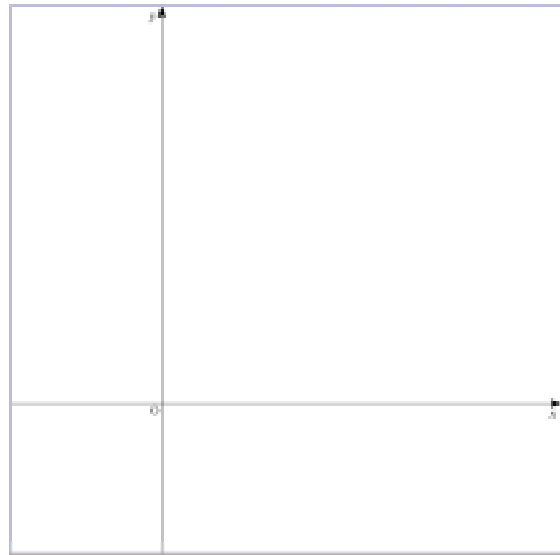
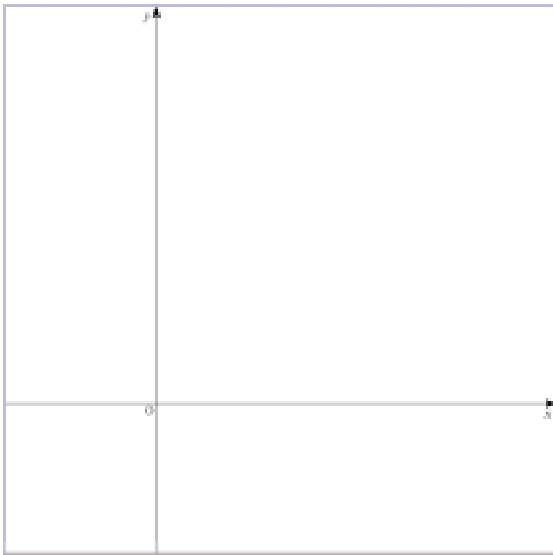
対数関数とは、



$y = \log_a x$ のグラフと性質 (指数関数 $y = a^x$ のグラフもかきましょう)

(1) _____ の場合

(2) _____ の場合



問題 (時間に余裕がある場合に扱います)

(1) 関数 $y = \log_2(x - 1)$ 、 $y = \log_2(1/x)$ は、関数 $y = \log_2 x$ とどのような位置関係にありますか。

(2) $1 < x < 8$ のとき、 $y = \log_2 x$ の値はどのような範囲にありますか。

対数はどんなところに使われているか？



1. 大きな数の桁数

2^{30} や 6^{20} などの大きな数について、それが何桁の数であるかを、対数を利用して調べることができます。

$(1/2)^{50}$ や 3^{-20} などの非常に小さな数について、小数点以下どこまで0が続くのかを調べることができます。(どちらも教科書の常用対数のところで出てきます)

2. 地震の大きさを表す マグニチュード

マグニチュードをM、震源から100km離れたところの地震計の振幅をa(マイクロン)とすると $M = \log_{10}a$ で表されます。

例えば、震源から100km離れたところでの地震計の振幅が1mm (= 1000 ミクロン) だったとすると、震度は $M = \log_{10}1000 = 3$ となります。

3. フェヒナーの法則

「人間の感覚は刺激の対数に比例する」という説を唱えた心理学者にフェヒナー(1801 ~ 1887、ドイツ)という人がいます。

例えば、右手と左手に10gと12gの重りを持ち、次に30gと32gの重りを持ってみます。どちらも2gの違いですが、10gと12gのときのほうが、重さの違いを大きく感じるというのです。それは、 \log_{10} と \log_{12} の差のほうが、 \log_{30} と \log_{32} の差より大きいためだというのです。

彼は、Eを感覚、Rを刺激、Kを定数として、 $E = K \log R$ という式を唱えました。

4. 情報量

確率Pで起こる事柄が現に起こったことを知ったときの

「情報量I」は、 $I = \log_2 1/p$ (単位は、ビット) で与えられます。

例えば、サイコロを投げて「1の目」が出たことを知ったときの情報量は、 $p = 1/6$ なので、 $I = \log_2 1/(1/6) = \log_2 6 = 2.56$ (ビット)

「1か2のいずれかの目」が出たことを知ったときの情報量は、 $p = 1/2$ なので、 $I = \log_2 1/(1/2) = \log_2 2 = 1$ (ビット)

5. 放射性物質の半減期

放射性物質は、放っておくとどんどん分解して少なくなってしまいます。最初にあった量が半分に減ってしまうのに要する時間のことを「半減期」といいます。

放射性物質の半減期を利用して、出土した遺跡などの年代測定を行うことができます。その計算で対数が役立ちます。



このほか、音の大きさを表すデシベル (dB) や酸性の度合いを表すpH (ペーハー) にも対数が活用されています。私たちの身の周りには対数がたくさん用いられています。

GRAPESの基本操作

<ソフトの起動>

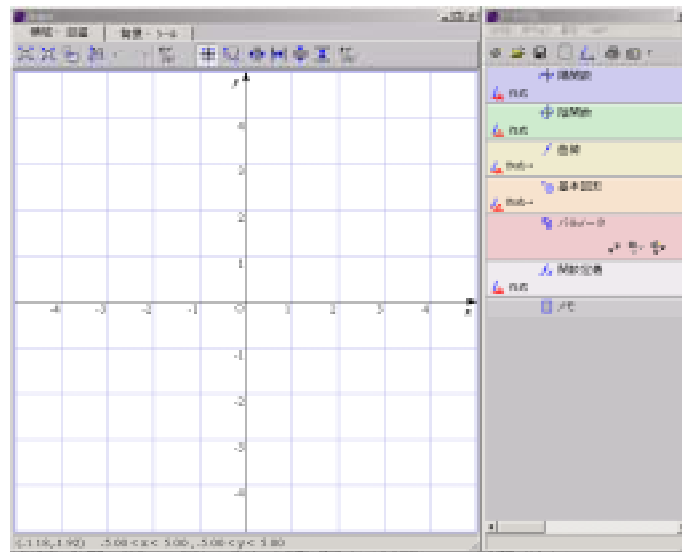
パソコンの電源を入れます．

しばらくすると、ディスプレイ上に小さな絵（アイコン）がいくつか現れます．

ぶどうの絵「grapes.exe へのショートカット」にマウスの矢印（カーソル）を重ね、左ボタンを続けて2回押します．（ダブルクリック）

GRAPES の初期画面が現れます．

「グラフウィンドウ」と「データパネル」の2つが表示されます．



<グラフの描画>

（例1）直線 $y = 2x + 1$

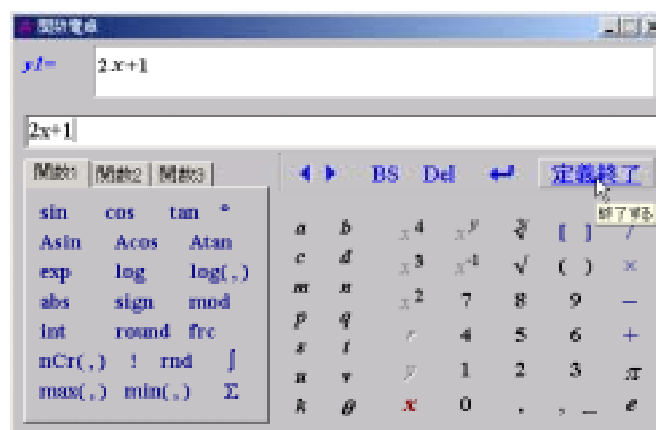
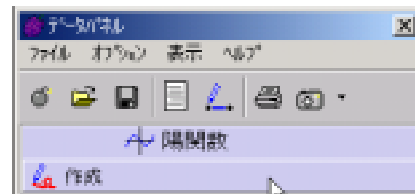
「データパネル」の陽関数の作成ボタンをクリックします．

「関数電卓」ボックスが現れます．

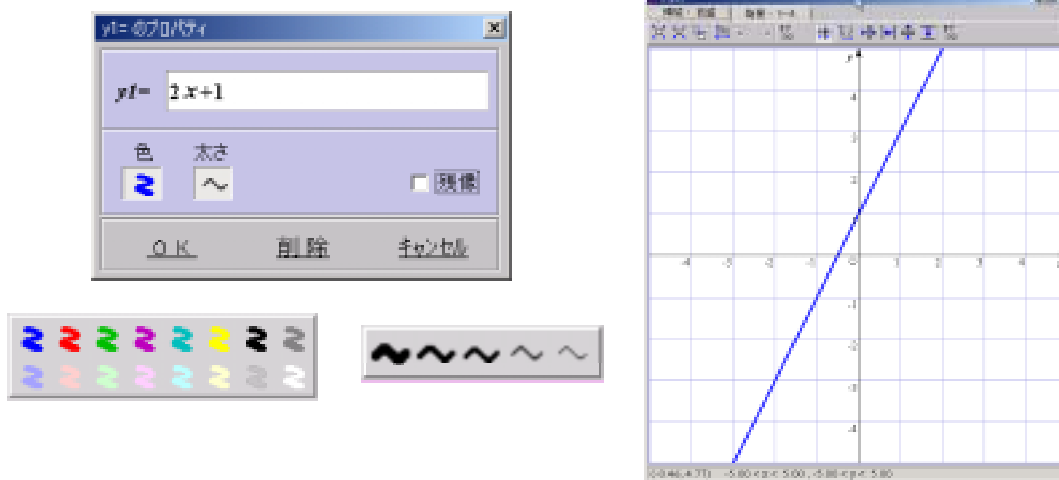
2段目のボックスに、「2、x、+、1」の順に入力します．

（入力はキーボードからでも可能）

定義終了をクリックします．



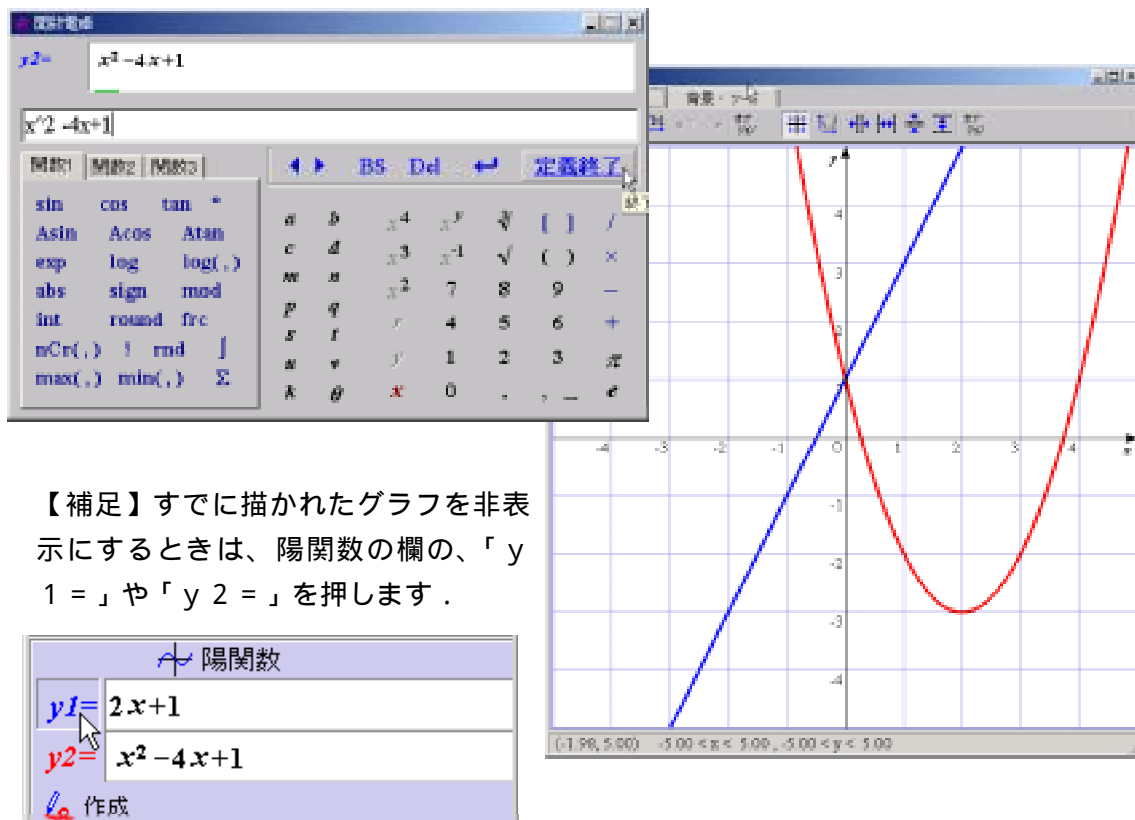
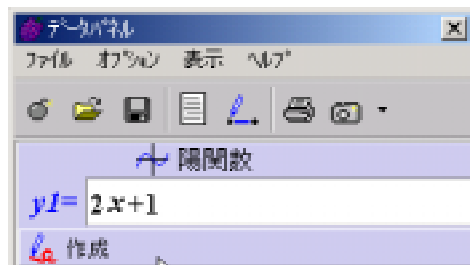
「y1 = のプロパティ」ボックスが現れるので、色、太さを選択します。
OKをクリックします。



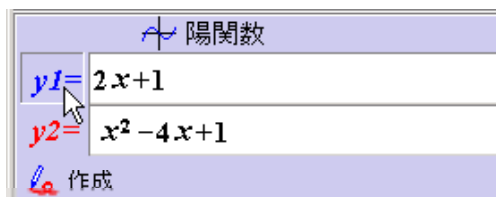
(例2) 放物線 $y = x^2 - 4x + 1$

陽関数の作成ボタンをクリックします。

「関数電卓」ボックスに式を入力します。
 x^2 は、「x、²」と入力します。
キーボードからだ、「x、^、2」です。
以下は、(例1)と同じです。



【補足】すでに描かれたグラフを非表示にするときは、陽関数の欄の、「y1 = 」や「y2 = 」を押します。

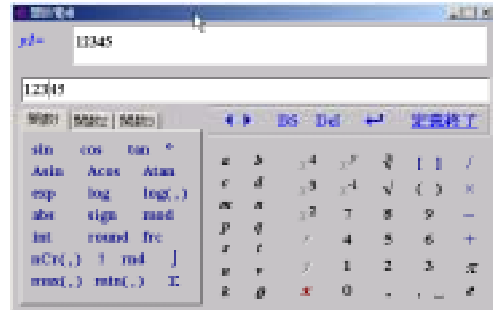


(練習1) 関数 $y = -2x^2 + 12x - 15$ のグラフをかきなさい。

(練習2) 陰関数の作成ボックスを使って、円 $x^2 + y^2 = 3$ をかきなさい。

【補足】間違って入力したものを消すときは、点滅しているカーソル(縦棒)の、前を消すときは BS を、後を消すときは Del を押します。

右図(123|45)で、
BS を押すと、1245 となり、
Del を押すと、1235 となります。



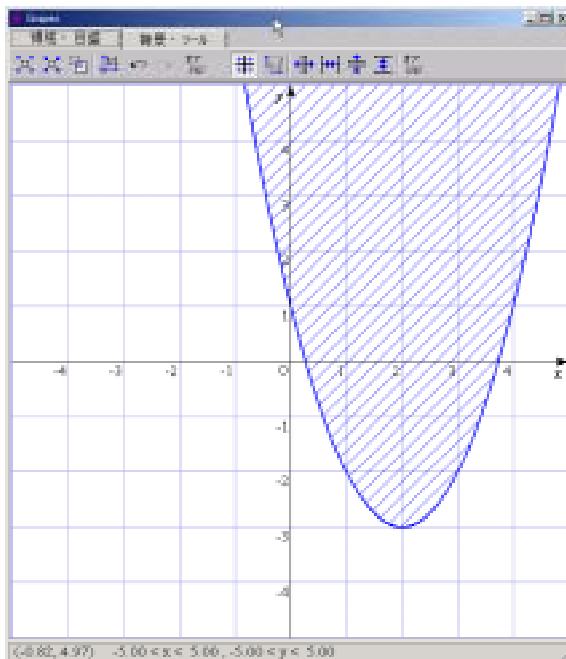
(例3) 領域 $y = x^2 - 4x + 1$

陰関数の作成ボックスに、この式を入力します。

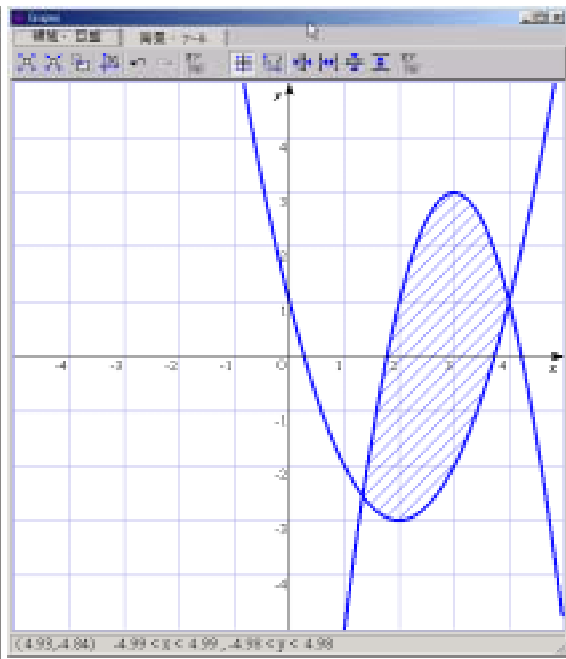
(例4) 領域 $y = x^2 - 4x + 1$ かつ $y = -2x^2 + 12x - 15$

陰関数の作成ボックスに次のように入力します。

$(y = x^2 - 4x + 1) \text{ and } (y = -2x^2 + 12x - 15)$



(例3)

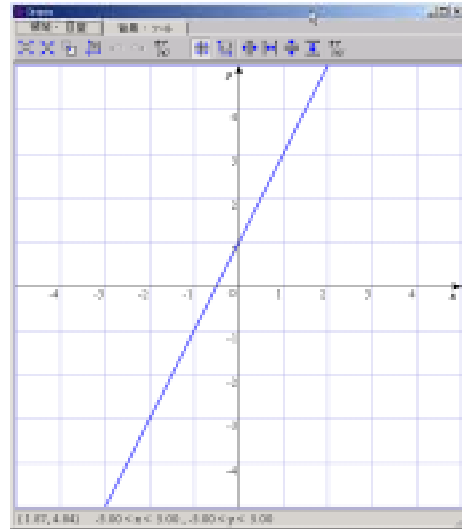


(例4)

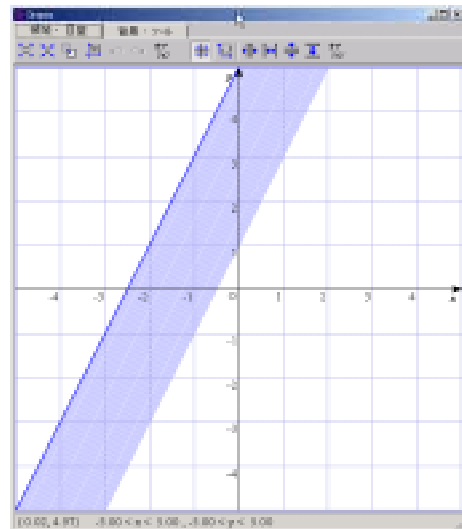
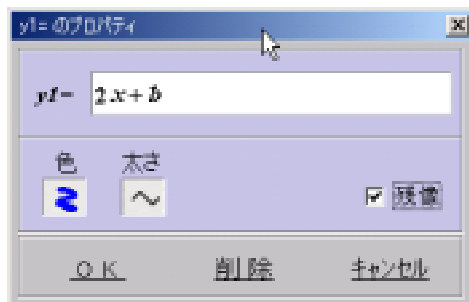
(例5) 直線 $y = 2x + b$

陽関数の作成ボックスで、「2、x、+、b」と入力します。

最初は、 $b = 1$ のときのグラフが描画されますが、「データパネル」のパラメータのボックスで、 b の値を変化させて、グラフの変化を見ることができます。



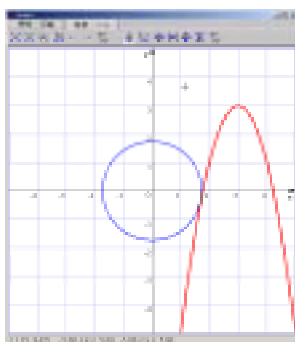
「y = のプロパティ」で残像にチェックを入れると、 b の変化によって描かれた図形がそのまま残ります。



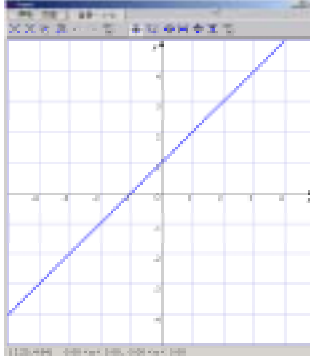
(練習3) 直線 $y = ax + 1$ のグラフをかき、傾き a の値を変化させてみなさい。

(練習4) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフをかき、 a 、 c 、 b の値を順に変化させてみなさい。

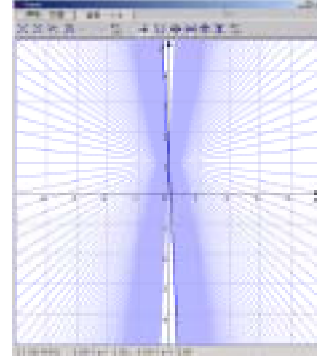
<解答> 練習1, 2



練習3 ($a = 1$ のとき)



(a を変化させたときの残像)



(例6) 指数関数 $y = 2^x$ のグラフ

陽関数の作成ボックスで、「2、 y 、 x 」と入力します。

グラフが上に偏っているので、画面を下げます。

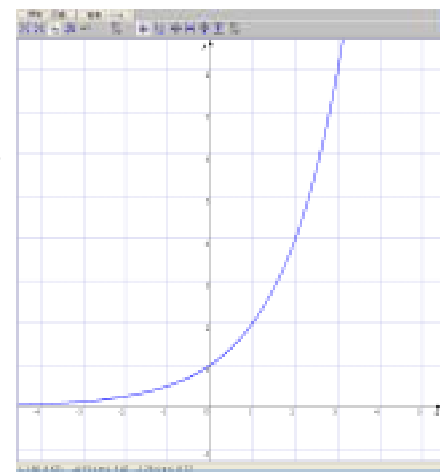
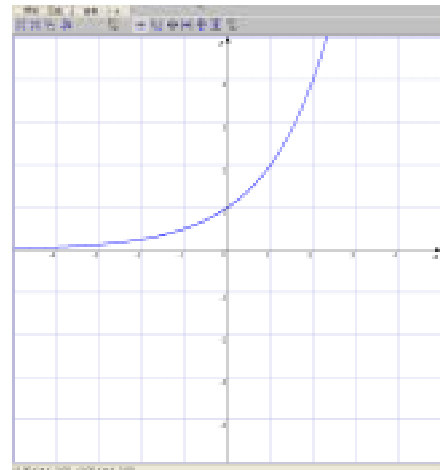
画面上部にある「移動」ボタンを押します。

ボタンが押された状態で、グラフ表示領域をドラッグします。(マウスの左ボタンを押したまま、移動したい方向へマウスを動かす。画面を引きずる感じ)



移動ボタンの左側にあるボタンを押すと、画面を「拡大」「縮小」することができます。

右側のボタンは、 x 、 y の目盛を1:1にします。



(練習5) $y = 3^x$ 、 $y = (1/2)^x$ のグラフをかきなさい。

(練習6) $y = a^x$ のグラフをかき、 a を変化させてみなさい。

(解答)

練習5

練習6

