

数学科学習指導案

日時 平成30年6月1日(金) 公開授業 I
学級 岩手大学教育学部附属中学校
3年D組
会場 1C2A教室
授業者 藤井 雅文

1 単元名 平方根

2 単元について

(1) 生徒観

先日行った事前調査において、「なぜ、負の数を学んだのでしょうか。」「負の数を学んだことによって、できるようになったことは何ですか。」に対する生徒の解答は以下の通りであった。

- | | |
|------------------------------------|-------|
| Q. なぜ、負の数を学んだのでしょうか。(複数回答) | |
| ・日常では、負の数でしか表せないものがあるから | … 12人 |
| ・負の数があるから、正の数だけではないから | … 9人 |
| ・受験のため、学習するきまり、教科書や学習指導要領にある | … 9人 |
| ・計算できる問題を多くするため | … 7人 |
| ・数の世界を広げるため、表せることが増えるから | … 4人 |
| Q. 負の数を学んだことによって、できるようになったことは何ですか。 | |
| ・いろいろな計算ができるようになった。 | … 31人 |
| ・日常で利用できるようになった。(気温、水位、値段) | … 4人 |
| ・関数や方程式の学習で負の数まで利用できるようになった | … 3人 |
| ・考えられる問題の幅が広がった | … 3人 |
| ・ $a - b$ を加法と見ることができるようになった | … 2人 |

負の数まで、数の範囲を広げることの必要性について記述した生徒は半数程度に留まった。新しい数を必要とする場面を設定しなければ、必要性については実感させるのは難しい。また、有用性については多くの生徒が計算技能に留まっており、それ以外の記述ができた生徒は少なかった。新しい数を学ぶことで、どのような世界が広がるのか実感させることが必要である。

(2) 教材観

次期学習指導要領において、第3学年の「2 内容 A 数と式」には、

- | |
|---|
| (1) 正の数の平方根について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。 |
| ア 次のような知識及び技能を身に付けること。 |
| (ア) 数の平方根の必要性と意味を理解すること。 |
| (イ) 数の平方根を含む簡単な式の計算をすること。 |
| (ウ) 具体的な場面で数の平方根を用いて表したり処理したりすること。 |
| イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。 |
| (ア) 既に学習した計算の方法と関連付けて、数の平方根を含む式の計算の方法を考察し表現すること。 |
| (イ) 数の平方根を具体的な場面で活用すること。 |

とある、既習と関連付けることについては、これまで、評価規準の作成、評価方法等の工夫改善のための参考資料で触れられていたものが掲載された。これは、平方根の学習を単なる知識や技能の習得で終わらせるのではなく、これまでの学習を振り返りながら考察することの必要性を示している。

本単元は、新しい数として平方根を導入し、無理数まで数の世界を広げる単元である。数の範囲の拡張については、小学校では小数や分数、中学校では負の数への拡張について経験している。高校でも数の範囲の拡張によって数学の世界は広がっていく。数の範囲を拡張することは、これまで数で表すことができなかったものが思考の対象になることを意味する。そのため、まずはこれまでの数で表すことができない数の存在を知ることが必要となる。また、数の範囲が拡張にともなって、これまでの計算方法が利用できるのかを確かめることも必要である。これらのことは、これまでの数の範囲の拡張でも経験してきたことであり、今後の数の範囲の拡張でも必要なことである。本単元では、平方根の学習を通して、このような学び方についての理解を深めさせていきたいと考えている。

(3) 学びの本質にせまる指導とその評価について

数学科における学びの本質のひとつに「物事を論理的に考える力、考えようとする姿勢・態度」を掲げて

いる。無理数の定義について理解し、無理数までを含めた数の計算ができるようになることは、本単元の目的のひとつである。しかし、本単元で目指すのは、学び方を理解することである。中学校での数の拡張は、1年生の負の数に続いて2度目である。また、生徒はこれまでも小数や分数において数の拡張を経験してきた。新しい数を獲得したときに、どのようなことを考えなければならないかを理解することが、本単元における学びの本質であると考えている。このことは高校数学における虚数の学習にも生きる。最終的には、自分が新しい世界に足を踏み入れたときに、何をすればいいのか戸惑うのではなく、これまでの経験がその世界でも通用するのかを確かめようと動き出せる人間になって欲しいと願っている。

そのために単元の導入において、新しい数を用いなければならない場面を設け、数の範囲を拡張することの必要性を実感させる。また、これまでの数の範囲の拡張を想起し、本単元で学ぶべき内容を見通すことで、主体的に学習に取り組むことができるだろう。四則計算の方法についても既習を利用して計算方法を見いだすことができるようにする。これらの学習を通して、学びの本質に迫っていきたい。

また、単に用語の暗記と計算方法の習得にならないよう、確認問題を通して理解の状況を把握し、指導へと生かしていく。単元末には、数の平方根を含む式の乗法の計算について既習をもとに説明したり、加減の計算が文字を用いた数の計算と同じようにできることがこれまでの単位量を用いた計算と同じことであることを説明したりする評価問題を行う。また、導入の問題をもう一度提示し振り返りを記述させることで、本単元を通して数の世界が広がったことを実感させるとともに、今後、新しい数と出会ったときにどんなことを考えていく必要があるのかを問うことで、学びの本質に迫ったのかを見とりたい。

3 単元の指導計画および評価計画

(1) 育成を目指す資質・能力

これまでの学びを生かして論理的に考察し、問題を解決する力、解決しようとする姿勢・態度

(2) 指導目標

数の平方根について理解し、数の概念についての理解を深めるとともに、事象を数の平方根を用いて数学的に表現・処理することができる。また、数の平方根の性質や計算について考察することができる。

(3) 評価規準

【数学的な知識、技能】

- ・数の平方根の必要性と意味を理解している。
- ・素因数分解をすることができる。
- ・数の平方根を含む簡単な式の計算ができる。
- ・具体的な場面で数の平方根を用いて表したり処理したりすることができる。

【数学的な思考力・判断力・表現力】

- ・既に学習した計算の方法と関連付けて、数の平方根を含む式の計算の方法を考察し表現することができる。
- ・数の平方根を具体的な場面で活用することができる。

【数学を積極的に活用しようとする態度】

- ・新しい数の必要性について考えたり、数の平方根を具体的な場面で積極的に活用したりしようとしている。

(4) 指導と評価の計画

学習内容	具体的な手立てや授業での留意事項	目指す生徒の姿
①②③平方根の必要性と意味	<p>生徒にパスタメジャーを提示し、使い方を紹介する。1人前の円の直径が2cmのときの2人前の円の直径を求める数学的活動に取り組みさせる。解決過程において、生徒は2乗して2になる数が必要なことに気づくだろう。そのような数が、これまで学習した数で存在するのかを確かめるために、逐次近似値を求める方法を考えさせる。コンピュータで近似値を提示し、小数や分数で表すことができなさそうであることから新しい数の必要性に気づかせる。また、これまでの数の範囲の拡張の経験をもとに、本単元の学びの見通しを持たせる。</p> <p>2乗して2になる数がこれまでに学んだ数では表すことができないこと、平方根について教える。2と$\sqrt{4}$が等しいことや数の大小についても平方根の意味をもとに気づかせる。</p> <p>有理数、無理数について教え、これまでに学んだ数を整理することで、改めて平方根を学んだことで数の範囲が拡張されたこと、すべての数を表すことができるようになったことを実感させる。また、$\sqrt{2}$</p>	<p>○新しい数の必要性について考えようとしている。</p> <p>【数学を積極的に活用しようとする態度】</p> <p>○数の平方根の必要性と意味を理解している。</p> <p>○平方根の大小関係、無理数について理解している。</p> <p>【数学的な知識、技能】</p>

	<p>が無理数であり、おこれまでに学んだ数では確かに表せないことを、背理法を用いた証明を紹介し理解させる。</p> <p><u>確認問題では、平方根の必要性や意味、数の大小の問題等に取り組む。</u></p>	
④素因数分解	<p>$\sqrt{196}$ は有理数か無理数か考えさせる。196 が 14 の 2 乗であることを知っている生徒は多い。では、知らない場合はどのようにしたらよいのかを問い、小さい自然数の積に表して考える方法を見いださせる。用語を教え、素因数分解の問題に取り組ませる。</p>	<p>○素因数分解することができる。 【数学的な知識、技能】</p>
⑤⑥⑦根号をふくむ式の乗除	<p>$\sqrt{2A} \sqrt{8}$ の計算結果が $\sqrt{16}$ になるのかを考えさせる。2 乗して説明する方法、近似値を用いて説明する方法を出させたい。また、根号の中の数をできるだけ小さい自然数にするというきまりや分母に根号がない形に表すというきまりを教え、計算や式の変形に取り組ませる。</p> <p>平方根の近似値について、$\sqrt{20}$ や $\sqrt{200}$ の近似値を電卓で求めさせ規則性を見いださせる。なぜそのようになるのかを問い、式の変形を利用して説明させる。</p> <p><u>確認問題では、根号を含む式の乗除の計算の原理を理解しているのか、正確に計算できるのか、よりよい計算方法を選択しているのか等の問題に取り組む。</u></p>	<p>○$\sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{ab}$ が成り立つ理由を説明することができる。 【数学的な思考力・判断力・表現力】</p> <p>○根号を含む式の乗除ができる。</p> <p>○式を変形し、根号の中の数を小さくしたり、分母を有理化したりすることができる。 【数学的な知識、技能】</p>
⑧⑨根号をふくむ式の加減	<p>$\sqrt{20} \sqrt{8}$ の計算結果が $\sqrt{10}$ になるのかを考えさせる。2 乗については未修のため、反例として、近似値を用いて計算したものや正方形を用いて説明させる。その上で、根号の中の数が同じ数の場合は、同類項をまとめるときと同じようにして計算できることを教える。</p> <p>根号の中の数が異なる場合については、根号の中の数をできるだけ小さくするという数の平方根を含む式を表すときのきまりに沿って考えればよいことを確認し、問題に取り組ませる。</p> <p><u>確認問題では、根号を含む式の加減では、根号の中の数を加えてはいけないことを理解しているのか、正確に計算できるのか等の問題に取り組む。</u></p>	<p>○$\sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{a0b}$ が成り立たないことを示すことができる。 【数学的な思考力・判断力・表現力】</p> <p>○根号を含む式の加減ができる。 【数学的な知識、技能】</p>
⑩根号を含む式のいろいろな計算	<p>分配法則や乗法公式を利用して、根号を含む式の計算を行う。式の値を求める問題では、式を変形してから代入することで計算が簡潔にできることを確認し、よりよい方法を考えることよさを再認識させたい。</p>	<p>○既習の計算を利用して、いろいろな計算をすることができる。 【数学的な知識、技能】</p>
⑪具体的な場面での活用	<p>A4 のプリントを配布し、教科書にある折り方について説明する。そして、学級通信(A4)と学校便り(A3)では紙面の大きさが2倍になっていることを確認し、A4の原稿をA3のサイズで印刷するためには倍率を何%にすればよいか考えさせる。学校のコピー機の写真を見せ、平方根が身近に利用されていることに気づかせたい。また、A5とB5の辺の長さの関係、A判の長辺、短辺、対角線の長さの関係を教え、これらを用いることで、いろいろな倍率を求めることができることを伝える。</p> <p><u>評価問題では、原版のサイズとコピーしたい紙のサイズを決め、その倍率を求めさせる。授業で扱ったA判同士の拡大だけでなく、縮小やA判からB判へのコピーなど、さまざまな倍率を求められるかを見とる。</u></p>	<p>○具体的な場面で、数の平方根を用いて考察することができる。 【数学的な思考力・判断力・表現力】</p> <p>○具体的な場面で数の平方根を用いて表したり処理したりすることができる 【数学的な知識、技能】</p> <p>●数の平方根を具体的な場面で積極的に活用しようとしている。 【数学を積極的に活用しようとする態度】</p>
⑫単元テスト		<p>●【数学的な思考力・判断力・表現力】</p> <p>●【数学的な知識、技能】</p>

4 本時について

(1) 主題 数の範囲を拡張することの必要性

(2) 指導目標

・数の平方根の必要性を実感するとともに、本単元の学習の見通しをもたせる。

(3) 評価規準

【数学を積極的に活用しようとする態度】

○新しい数の必要性について考えようとしている。

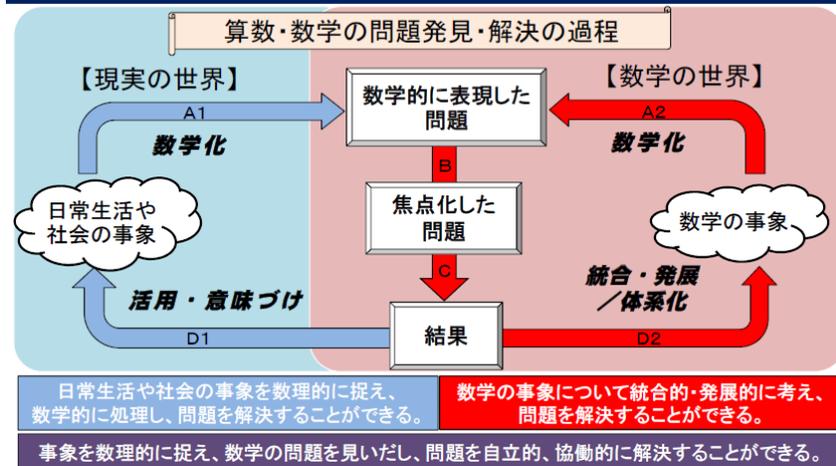
(4) 指導と評価の計画

本時における学びの本質は2点ある。1つ目は、数の範囲を拡張する必要性の理解である。単に新しい数があることを教えるのではなく、身近にあるパスタメジャーを題材とした問題解決の場面において、解決のためには新しい数が必要であることを実感させたい。2つ目は、数の範囲を拡張した後、どのような学習に取り組むのかという学び方の理解である。2乗して2になる数の必要性を理解した後、その数を定義付けて終わるのではなく、これまでの数の範囲の拡張を振り返り、どのような学習をしてきたのかを問うことで、本単元の学びの見通しを持たせたい。

評価については、数学を積極的に活用する態度について、学びの本質に迫るための評価を行う。終結の振り返りの場面において、本時の学びについてと本単元の見通しについて記述させることで、新しい数の必要性や、単元の学習に主体的に取り組もうとしているのかを見とる。学びの本質に迫ったかを見とる評価については、活用の場面で行う。

(5) 本時の展開

段階	学習内容および学習活動 ・予想される生徒の反応等	時間 (分)	指導上の留意点および評価 ・学びの本質に迫る指導の手立て等 ○学びの本質に迫るための評価
導入	1. 問題を読む。 1人前の円が直径2cmであるパスタメジャーの、2人前の円の直径は何cmになるでしょう。 T: 2人前って、1人前と比べてどうなってるの? S: 量が2倍になっている。 T: パスタメジャーで言えば、どういうこと? S: 面積が2倍になるということ。	5	・事象を数学化する。
展開	2. 面積が2倍になるときの直径の長さを考える。 T: 面積が2倍になるということは? S: 直径が2倍になっている。 ⇒ 面積を求めてみると、4倍になるから違う。 S: 面積が2倍になるということは、 $(\text{半径}) \times (\text{半径}) \times \pi = 2\pi$ だから、半径は2乗して2になる数になる。 ⇒ 2乗して2になる数が分かれば解決できる。 3. 2乗して2になる数を考える。 S: 1.5くらいかな。 T: 1.5よりも大きい?小さい? ⇒ 近似値の求め方を生徒と確認していく。 続けるとどうなるのかは教師から示す。 4. これまでに学習した数と比較する。 ・ 2乗して2になる数を、循環小数、円周率と比較する。 ・ 2乗して2になる数を、分数で表すのは無理そうであることを感じさせる。 ・ 円周率のように、どこまでも続く規則性のない数であることを実感させる。 ⇒ 2乗して2になる数は、これまで学習した数では表せないことを確認する。	35	・ 2乗して2になる数に問題を焦点化する。 ・ 新しい数の必要性を実感させる。
終結	5. 数の範囲の拡張について振り返る。 ・ これまでも、分数や小数、負の数へと数の範囲を拡張してきたこと、新しい数を獲得したならば既習の性質等を適用できるのかを考えてきたことを自覚する。 6. 本時の学びを振り返る。 ・ 本時の学習を振り返り、「新しい数の必要性」「数の範囲の拡張」について考えたことを記述する。	10	・ これまでの数の範囲の拡張したときの学びを振り返り、本単元で学ぶ内容の見通しをもたせる。 ○新しい数の必要性や、数の範囲を拡張することの数学的価値について考えようとしている。 【数学を積極的に活用しようとする態度】



日常の事象	…「パスタメジャー」の2人前の直径の長さは？
数学的に表現した問題	…面積を2倍したときの直径の長さは？
焦点化した問題	…2乗して2になる数は？
結果	…半径が1.4cmくらいということは分かった。
数学の事象	…2乗して2になる数を、正確に表すことができない。
数学的に表現した問題	…2乗して2になる数は、これまでに学習した数で表すことができないのか？
焦点化した問題	…無限小数は、これまでに学習した数で表すことができないのか？
結果	…2乗して2になる数のように規則性がない場合は表すことができないから、新しい数が必要になる。

<日常の事象・パスタメジャーを導入とした理由>

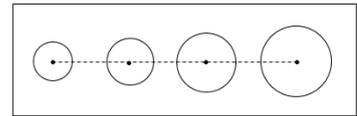
- ・世の中には、自分たちが知らないもの、気づかないものが使われているんじゃないかという疑問をもたせたい。
- ・中学生は、7割以上の生徒が平方根の存在を知っており、根号を含む式の計算等の練習問題にも取り組んでいる。正方形で始めることで、単に逐次近似値を求める作業になるのではないかと考えた。日常の具体物を題材とすることで、「2乗して2になる数を明らかにする」という本時の課題をより意識できると考えた。

評価問題案 I パスタメジャー

【評価問題】

あなたは、キッチン用品の設計者です。新商品のパスタメジャーを設計するように指示がありました。条件は以下の通りです。

- ① パスタメジャーの形状は長方形とすること。
- ② 1人前から4人前まで図ることができる4つの円があること。
- ③ 1人前の直径は 2cm, 2人前以降はそれを基準とすること。
- ④ 4つの円は、少なくとも 1cm 以上離れた位置にあること。また、長方形の各辺からも 1cm 以上離れていること。
- ⑤ 4つの円の中心は、左の例のように一直線上にあること。
- ⑥ 材料費を安くするために、パスタメジャーはなるべく小さい長方形にすること。

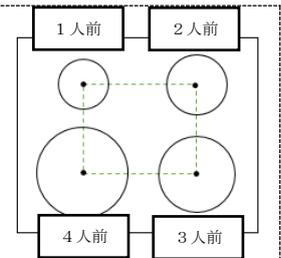


以上の条件を満たすパスタメジャーを設計しなさい。

【評価問題】

あなたは、キッチン用品の設計者です。新商品のパスタメジャーを設計するように指示がありました。条件は以下の通りです。

- ① パスタメジャーの形状は長方形とすること。
- ② 1人前から4人前まで図ることができる4つの円があること。
- ③ 1人前の直径は 2cm, 2人前以降はそれを基準とすること。
- ④ 4つの円は、少なくとも 1cm 以上離れた位置にあること。また、長方形の各辺からも 1cm 以上離れていること。
- ⑤ 4つの円の中心をつなぐと、左の例のように長方形になること。
- ⑥ 1人前から4人前までの穴の配置は、右のよう to すること。
- ⑦ 材料費を安くするために、パスタメジャーはなるべく小さい長方形にすること。



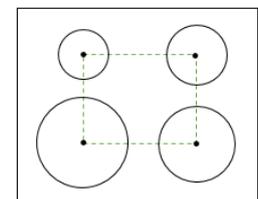
以上の条件を満たすパスタメジャーを設計しなさい。

ただし、 $\sqrt{2} \times 1.4$, $\sqrt{3} \times 1.7$, $\sqrt{5} \times 2.2$, $\sqrt{6} \times 2.4$ として計算し、長方形の長さは根号を用いずに表しなさい。

【評価問題】

あなたは、キッチン用品の設計者です。新商品のパスタメジャーを設計するように指示がありました。条件は以下の通りです。

- ① パスタメジャーの形状は長方形とすること。
- ② 1人前から4人前まで図ることができる4つの円があること。
- ③ 1人前の直径は 2cm, 2人前以降はそれを基準とすること。
- ④ 4つの円は、少なくとも 1cm 以上離れた位置にあること。また、長方形の各辺からも 1cm 以上離れていること。
- ⑤ 4つの円の中心をつなぐと、左の例のように長方形になること。
- ⑥ 材料費を安くするために、パスタメジャーはなるべく小さい長方形にすること。



以上の条件を満たすパスタメジャーを設計しなさい。

ただし、 $\sqrt{2} \times 1.4$, $\sqrt{3} \times 1.7$, $\sqrt{5} \times 2.2$, $\sqrt{6} \times 2.4$ として計算し、長方形の長さは根号を用いずに表しなさい。

評価問題案Ⅱ 数の範囲

【評価問題】

わたる：4つの直角三角形を合わせると、内側と外側に正方形ができるんだよ。

まい：なんか、内側の正方形の面積を求めるときに使った考えに似てるね。

わたる：そうそう、例えば、底辺2cm、高さ1cmの直角三角形で組み合わせると、内側の正方形の面積は、

$$(2+1)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 5$$

となるから、5cm²になるね。

ちなみに、内側の正方形の1辺の長さも $\sqrt{5}$ cmと分かるよ。

まい：面白いね。じゃあ、私は証明を考えてみるね。

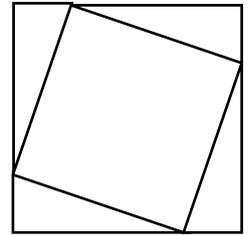
a, bを自然数として、底辺acm、高さbcmの直角三角形で組み合わせると、内側の正方形の面積は、

$$(a+b)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times a \times b = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

となるから、 $(a^2 + b^2)\text{cm}^2$ となって、内側の正方形の1辺の長さは $(\sqrt{a^2 + b^2})\text{cm}$ になるね。

わたる：aとbは自然数じゃないとダメなのかなあ。

まい：有理数や無理数でも成り立つか、いくつか例を挙げて試してみるね。



A判とB判の紙には、

- ・ A 5判の 2 枚の紙を，長いほうの辺で

